

1a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow |x-3| + \frac{1}{2}|x+1| - 2 = 0$

Vi får tre olika fall:

$$x \leq -1: 3 - x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}, \text{duger ej ty } x = \frac{1}{3} > -1.$$

$$-1 \leq x \leq 3: 3 - x + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 3, \text{som duger.}$$

$$x \geq 3: x - 3 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 3, \text{som duger}$$

Svar: $x = 3$

b) Eftersom vi t.ex. har att $f(0) = f(4) = \frac{3}{2}$ så är inte f omvändbar, och har därmed inte invers, v.s.v.

c) Vi faktorerar uttrycket i nämnaren (sök dess nollställen) och får $2x^2 + 4x - 30 = 2(x+5)(x-3)$. Funktionen g är definierad om uttrycket under rottecknet är ≥ 0 .

Vi studerar detta uttryck i ett teckenschema

		-5		2		3	
$\arctan(x-2)$	-	-	-	0	+	+	+
2	+	+	+	+	+	+	+
$x+5$	-	0	+	+	+	+	+
$x-3$	-	-	-	-	-	0	+
$\frac{\arctan(x-2)}{2x^2+4x-30}$	-	Ej def	+	0	-	Ej def	+

Av teckenschemat ser vi att $D_g =]-5, 2] \cup]3, \infty[$

Svar: $=]-5, 2] \cup]3, \infty[$

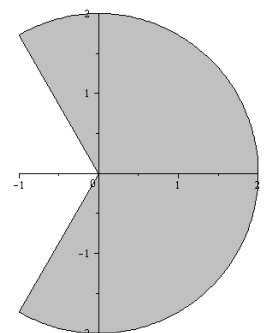
2. a) Med $w = -1 - i\sqrt{3}$ har vi $|w| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$. Argumentet för w finner vi t.ex. via en figur (rita figuren!) och får $\arg w = -\frac{2\pi}{3}$ (eller vilken som helst av $-\frac{2\pi}{3} + n2\pi, n \in \mathbb{Z}$).

Svar: $|w| = 2, \arg w = -\frac{2\pi}{3}$

b) $(zw)^8 = \left(5e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot 2e^{-i\frac{2\pi}{3}} \right)^8 = (10e^0)^8 = 10^8$

Svar: $(zw)^8 = 10^8$

c) Låt $u = x + iy \Rightarrow |u| = 2 \Leftrightarrow |x + iy| = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$, d.v.s. villkoret $|u| \leq 2$ ger oss alla komplexa tal som ligger innanför och på randen till en cirkel med medelpunkt i origo och radien 2. Det andra villkoret, $-\frac{2\pi}{3} \leq \arg u \leq \frac{2\pi}{3}$, innebär att vi har alla komplexa tal u som ligger mellan strålarna $-\frac{2\pi}{3}$ och $\frac{2\pi}{3}$. Båda villkoren är alltså uppfyllda för komplexa tal som ligger inom och på randen till cirkelsektorn i figuren.



3. a och b: Se kursboken.

c) Lösningförslag

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(-x - \frac{\pi}{4}\right)\right) \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$x - \frac{\pi}{6} = x + \frac{3\pi}{4} + n2\pi$$

eller

$$x - \frac{\pi}{6} = -\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) + n2\pi$$

Här saknar det första sambandet lösning i x (varför?)

Det andra sambandet ger att $x = -\frac{7\pi}{24} + n\pi$, som är de sökta lösningarna.

$$\text{Svar: } x = -\frac{7\pi}{24} + n\pi, n \in \mathbf{Z}$$

4.

A: SANT ty skalärprodukterna av planens normalvektorer $= \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = 12 - 2 - 10 = 0$, och då är

normalvektorena vinkelräta, vilket innebär att planen också är vinkelräta.

$$\text{B: SANT ty } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 3 \\ 3 \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 3 \\ 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 4t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$$

C: SANT ty xy -planet har ekvationen $z = 0$ och då har vi villkoret

$$-2 + t = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow x = 2 + 2 = 4, y = 1 + 2 \cdot (-1) = -1$$

Svar: Alla tre påståendena är sanna.

5.

$$\text{a) } D_f =]-1, \infty[\cap]-\infty, 1[\cap]0, \infty[=]0, 1[$$

$$\text{Svar: } D_f =]0, 1[$$

b) $\ln(x+1) + \ln(1-x) - \ln 3 - 2\ln x = 0$ har enligt ovan $D_{ekv} =]-1, \infty[\cap]-\infty, 1[\cap]0, \infty[=]0, 1[$, d.v.s. ev. lösningar måste tillhöra detta intervall.

Om $x \in]0, 1[$ så gäller $\ln(x+1) + \ln(1-x) = \ln 3 + 2\ln x \Leftrightarrow \ln(x+1)(1-x) = \ln 3x^2 \Leftrightarrow$

$$1 - x^2 = 3x^2 \Leftrightarrow 4x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \quad (x = -\frac{1}{2} \text{ är inte lösning ty detta värde ligger utanför } D_{ekv}).$$

$$\text{Svar: } x = \frac{1}{2}$$

c) Sätt $e^x = t > 0$ så får vi

$$t^2 - 2t - 8 \geq 0, t > 0 \Leftrightarrow (t+2)(t-4) \geq 0, t > 0 \Leftrightarrow (e^x + 2)(e^x - 4) \geq 0, e^x > 0 \Leftrightarrow x \geq \ln 4 = 2\ln 2, \text{ ty observera att } e^x + 2 > 0 \text{ för alla } x \in \mathbf{R}, \text{ vilket innebär att faktorn } e^x - 4 \text{ avgör tecknet för VL.}$$

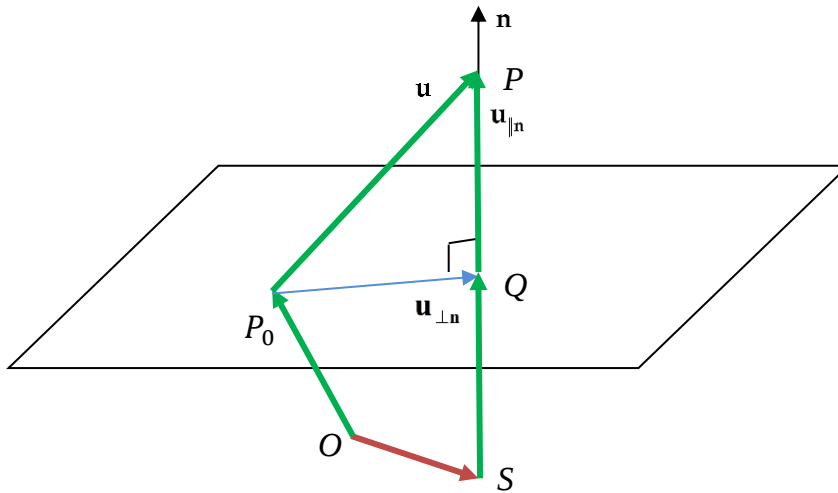
$$\text{Svar: } x \geq 2\ln 2$$

6. a) Se t.ex. kompendiet "Vektorer linjer och plan".

b) Med givna beteckningar får vi $\overrightarrow{CB} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$. Därmed har vi, om vi utnyttjar definitionen och lämpliga räkneregler för skalärprodukt,

$$\begin{aligned}
 a^2 &= |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \underbrace{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}_{=|\mathbf{u}|^2} - \underbrace{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}_{=\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}} - \underbrace{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}_{=\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}} + \underbrace{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}_{=|\mathbf{v}|^2} = \\
 &= |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}|^2 - 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u}|^2 - 2|\mathbf{v}||\mathbf{u}| \cdot \cos \alpha = \\
 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha, \text{ v.s.v.}
 \end{aligned}$$

c) Först en skiss!



Eftersom punkten $P_0 = (1,0,0)$ satisfierar planets ekvation ligger denna punkt i planet.

Låt $P = (1,1,-1)$ och $\mathbf{u} = \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Det sökta avståndet är $|\overrightarrow{QP}| = |\mathbf{u}_{\parallel n}|$ (se figuren ovan)

Projektionsformeln ger oss

$$\mathbf{u}_{\parallel n} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2} \right) \mathbf{n} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{0+2+1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{3}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Alltså är avståndet mellan punkten och planet $|\mathbf{u}_{\parallel n}| = \frac{1}{2}\sqrt{6}$ l.e.

För att bestämma koordinaterna för punkten S bestämmer vi punktens Ortsvektor $\overrightarrow{OS}$. Vi har enligt figuren

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP_0} + \mathbf{u} - 2\mathbf{u}_{\parallel n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alltså: $S = (0, -1, 0)$

En kontroll visar att

$$|\overrightarrow{SQ}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{SP}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OS}| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{6} = |\mathbf{u}_{\parallel n}| = |\overrightarrow{QP}|$$

Ytterligare kontroller kan göras, t.ex. visa att $\overrightarrow{SP}$ är ortogonal mot $\overrightarrow{P_0Q} = \mathbf{u}_{\perp n}$ (som då först måste bestämmas).

Svar: $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ l.e. respektive $S = (0, -1, 0)$

7. Vi undersöker definitionsområdena för ekvationens båda led.

VL: $\arccos(x^2 + 2x - 2)$ är definierat $\Leftrightarrow -1 \leq x^2 + 2x - 2 \leq 1$. Vi undersöker först vänstra och högra olikheten var för sig.

Vänstra olikheten: $-1 \leq x^2 + 2x - 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (x - (-1 + \sqrt{2}))(x - (-1 - \sqrt{2})) \geq 0 \Leftrightarrow$

(gör teckenstudium) $x \in]-\infty, -1 - \sqrt{2}] \cup [-1 + \sqrt{2}, \infty[$

Högra olikheten: $x^2 + 2x - 2 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (x + 3)(x - 1) \leq 0 \Leftrightarrow$

(gör teckenstudium) $x \in [-3, 1]$.

Båda olikheterna är således uppfyllda för $x \in [-3, -1 - \sqrt{2}] \cup [-1 + \sqrt{2}, 1]$, vilket är arccosfunktionens definitionsmängd $= D_{VL}$.

HL:

$\ln(x - 1)$ är definierat för $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$, d.v.s. vi har $D_{HL} =]1, \infty[$.

Vi ser nu att $D_{VL} \cap D_{HL} = \emptyset$, vilket innebär att ekvationen saknar lösning.

Svar: Ekvationen saknar lösning.